Distribution theory November 23 2001

Exam paper[1]

I

Consider the differential operator $D = (\frac{d}{dx})^2 + 2\frac{d}{dx} - 3$.

1. Determine the fundamental solution for D belonging to $\mathcal{D}'_+$.

2. Determine the solution $T \in \mathcal{D}'_+$ of the equation $DT = Y$ (Y the Heaviside one-step function).

Hint: instead of calculationg a convolution product one can use the symbolic calculus.

3. Determine, with the help of the symbolic calculus, the solution f of the following classical initial value problem, in which g is a continuous function on $\mathbb{R}$:

$$Df = g, \quad f(0) = 1, f'(0) = 1$$

4. What is the solution when $g = 1$?

II

1. Let S and T be distributions on $\mathbb{R}$. State when S en T satisfy the convolution condition, and define in that case the convolution product $S * T$.

2. Let S and T be distributions on $\mathbb{R}$ satisfying the convolution condition. Prove, for all $n \in \mathbb{N}$, the following formula:

$$x^n(S * T) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^k S) * (x^{n-k} T)$$

III

1. Give the definition of 'temperate distribution', and of the Fourier transform of a temperate distribution.

2. For $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ determine the Fourier transforms of T' and of $2\pi i x T$.

3. Show that the Fourier transform of an even (resp. odd) distribution is even (resp. odd).

4. Determine the Fourier transform T of the distribution $S =$ signum (the function equal to 1 for $x > 0$, and to -1 for $x < 0$).

5. State the general inversion formula for the Fouriertransform of temperate distributions.

6. Determine the Fourier transform of the distribution $\text{pv}\frac{1}{x}$.

[1]Parts I, II and III are independent

Distributietheorie 23-11-'01

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 + 2\frac{d}{dx} - 3$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (Y de Heaviside één-stap functie).

Aanwijzing: in plaats van een convolutieproduct te berekenen kan dit ook met de symboolrekening.

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij g een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$Df = g, \quad f(0) = 1, f'(0) = 1$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$?

II

1. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}$ zijn. Geef aan wanneer S en T aan de convolutievoorwaarde voldoen, en definieer in dat geval het convolutieproduct $S * T$.

2. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}$ zijn die aan de convolutievoorwaarde voldoen. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ de volgende formule geldig is:

$$x^n(S * T) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^k S) * (x^{n-k} T)$$

III

1. Geef de definitie van 'getemperde distributie', en van de Fouriergetransformeerde van een getemperde distributie.

2. Geef voor $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de Fouriergetransformeerden van T' en van $2\pi i x T$.

3. Toon aan dat de Fouriergetransformeerde van een even (resp. oneven) distributie even (resp. oneven) is.

4. Bepaal de Fouriergetransformeerde T van de distributie $S =$ signum (functie gelijk aan 1 voor $x > 0$, gelijk aan -1 voor $x < 0$).

5. Geef de algemene inversieformule voor de Fouriertransformatie van getemperde distributies.

6. Bepaal de Fouriergetransformeerde van de distributie hw $\frac{1}{x}$.

[1]De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk